



实验设计与统计分析

概述

对比、随机设计

区组设计

拉丁方设计

裂区设计

正交设计

回归设计

均匀设计

单因素

二因素

● 设计

● 实施

● 分析

相对简单

实际研究工作中，常需要同时考察**3个或3个以上**的因素。

● 3个或3个以上因素

3因素4水平

$$4^3 = 64$$

全面实施

10因素2水平

$$2^{10} = 1024$$

水平^{因素}

研究增稠剂用量、pH值和杀菌温度对豆奶稳定性的影响。

每个因素设置3个水平。

A 因素：增稠剂用量， A_1 、 A_2 、 A_3

B 因素：pH， B_1 、 B_2 、 B_3

C 因素：杀菌温度， C_1 、 C_2 、 C_3

3因素

$$3^3 = 27$$

3水平

3×3 拉丁方？

A 因素：增稠剂用量， A_1 、 A_2 、 A_3

B 因素：pH， B_1 、 B_2 、 B_3

C 因素：杀菌温度， C_1 、 C_2 、 C_3

$A_1B_1C_1$	$A_1B_2C_1$	$A_1B_3C_1$	$A_2B_1C_1$	$A_2B_2C_1$	$A_2B_3C_1$	$A_3B_1C_1$	$A_3B_2C_1$	$A_3B_3C_1$
$A_1B_1C_2$	$A_1B_2C_2$	$A_1B_3C_2$	$A_2B_1C_2$	$A_2B_2C_2$	$A_2B_3C_2$	$A_3B_1C_2$	$A_3B_2C_2$	$A_3B_3C_2$
$A_1B_1C_3$	$A_1B_2C_3$	$A_1B_3C_3$	$A_2B_1C_3$	$A_2B_2C_3$	$A_2B_3C_3$	$A_3B_1C_3$	$A_3B_2C_3$	$A_3B_3C_3$

全面实施

因素的主效，交互作用

选出最优水平组合

考察增稠剂用量、pH值和杀菌温度对豆奶稳定性的影响。

每个因素设置3个水平进行试验。

A因素：增稠剂用量， A_1 、 A_2 、 A_3

目的

B因素：pH， B_1 、 B_2 、 B_3

寻求最优水平组合

C因素：杀菌温度， C_1 、 C_2 、 C_3

多因素试验研究



寻求最优水平组合

正交试验设计

Orthogonal experimental design



实验设计与统计分析

概述

对比、随机设计

区组设计

拉丁方设计

裂区设计

正交设计

回归设计

均匀设计



正交设计(Orthogonal experimental design)

- 研究多因素多水平的一种设计方法，
- 它是根据正交性从全面试验中挑选出**部分有代表性的**点进行试验。
- 日本著名的统计学家田口玄一提出。





正交设计

1

正交设计的概念及原理

2

正交设计的基本程序

3

正交设计的结果分析

1.1 基本概念

1.2 基本原理

1.3 正交表及其性质

1.4 正交表的类别



1 正交设计的概念及原理

1.1 基本概念

利用正交表来安排与分析多因素试验的一种设计方法。





1 正交设计的概念及原理

考察增稠剂用量、pH值和杀菌温度对豆奶稳定性的影响。

每个因素设置3个水平进行试验。

A因素：增稠剂用量， A_1 、 A_2 、 A_3

B因素：pH， B_1 、 B_2 、 B_3

C因素：杀菌温度， C_1 、 C_2 、 C_3

3因素

3水平

$$3^3 = 27$$



1 正交设计的概念及原理

1.2 基本原理

A因素：增稠剂用量， A_1 、 A_2 、 A_3

B因素：pH， B_1 、 B_2 、 B_3

C因素：杀菌温度， C_1 、 C_2 、 C_3

全部试验组合

在试验安排中，每个因素在研究的范围内选几个水平，
可以理解为在选优区内打上**网格**，
如果网格上的每个点都做试验，就是**全面试验**。

A 因素：增稠剂用量， A_1 、 A_2 、 A_3

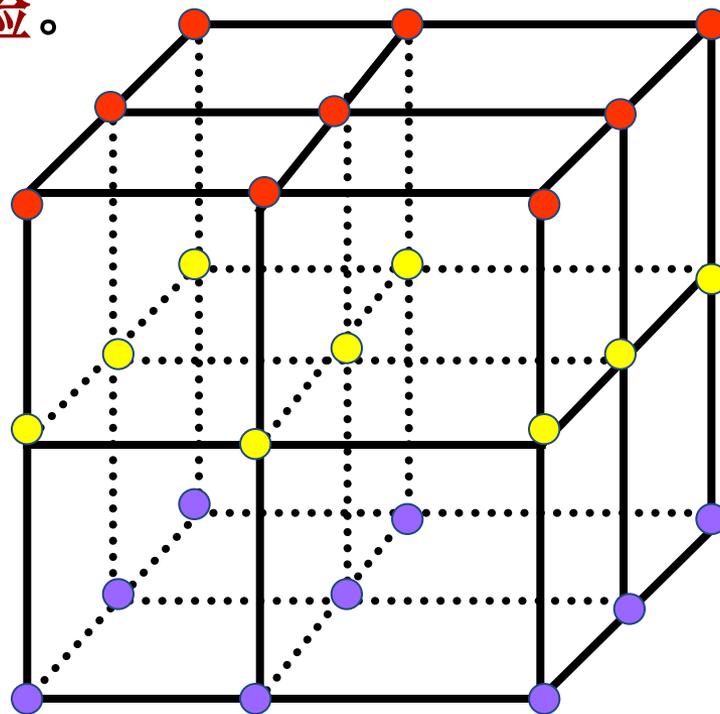
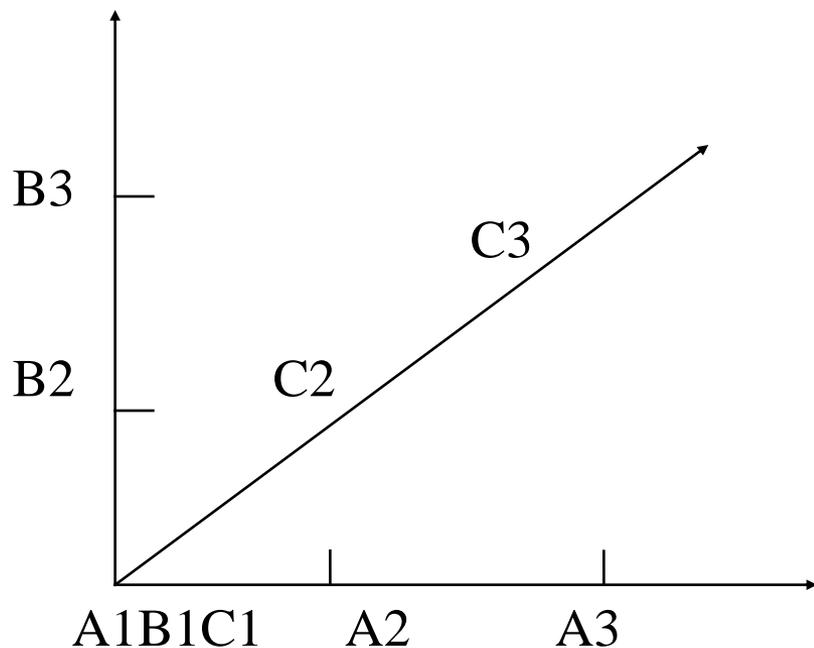
B 因素：pH， B_1 、 B_2 、 B_3

C 因素：杀菌温度， C_1 、 C_2 、 C_3

3个因素的选优区可以用一个立方体表示。

3个因素各取3个水平，把立方体划分成27个格点。

若27个网格点都试验，就是全面试验。

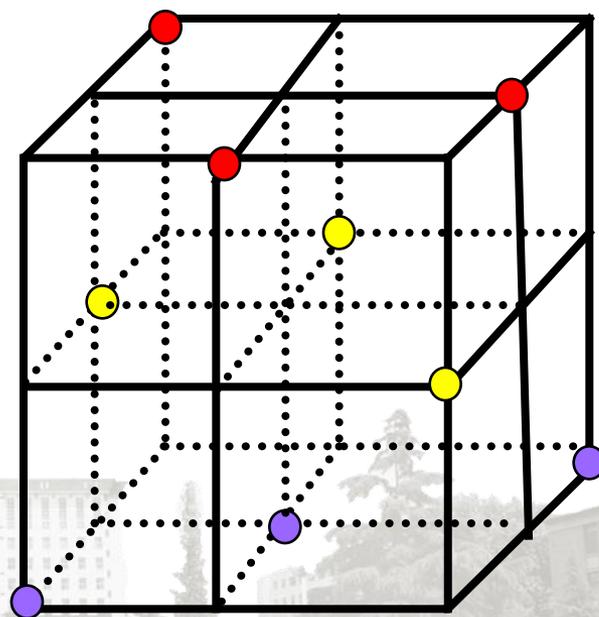
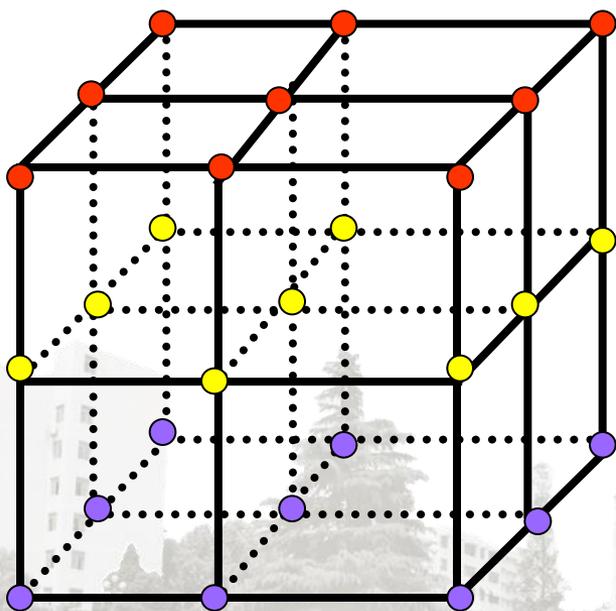


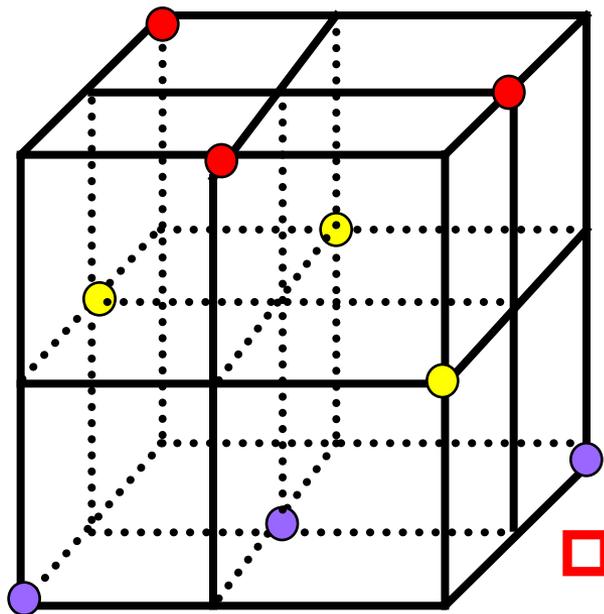


1 正交设计的概念及原理

1.2 基本原理

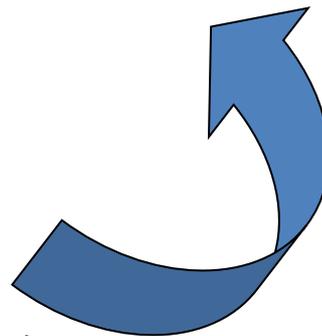
正交设计就是从选优区全面试验点（水平组合）中挑选出有**代表性的部分试验点**（水平组合）来进行试验。



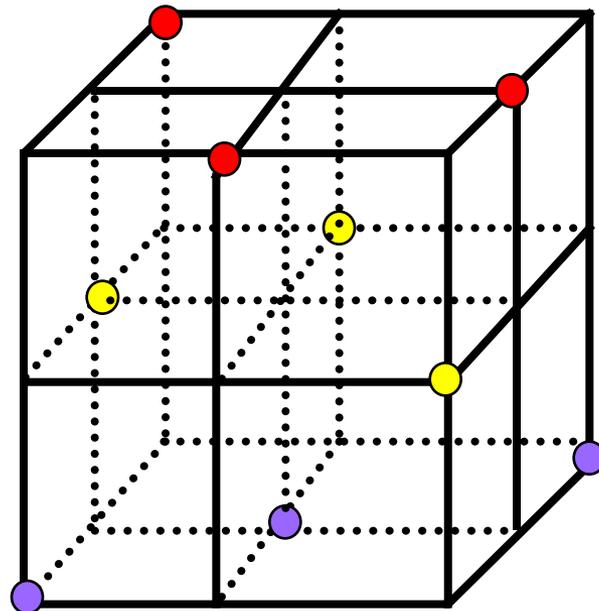


9个点

- 有很强的代表性，
 - 能较全面地反映试验优选区的基本情况。
-
- 分布均衡；
 - 立方体的每个平面上，都有3个点；
 - 在立方体的每条线上也都有1个试验点。



9个点的组合



$A_1B_1C_1$

$A_2B_1C_2$

$A_3B_1C_3$

$A_1B_2C_2$

$A_2B_2C_3$

$A_3B_2C_1$

$A_1B_3C_3$

$A_2B_3C_1$

$A_3B_3C_2$

$A_1B_1C_1$ $A_1B_2C_1$ $A_1B_3C_1$

$A_1B_1C_2$ $A_1B_2C_2$ $A_1B_3C_2$

$A_1B_1C_3$ $A_1B_2C_3$ $A_1B_3C_3$

$A_2B_1C_1$ $A_2B_2C_1$ $A_2B_3C_1$

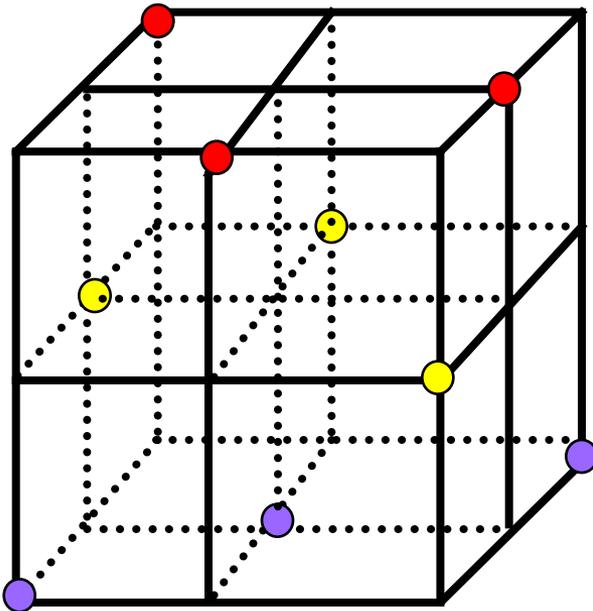
$A_2B_1C_2$ $A_2B_2C_2$ $A_2B_3C_2$

$A_2B_1C_3$ $A_2B_2C_3$ $A_2B_3C_3$

$A_3B_1C_1$ $A_3B_2C_1$ $A_3B_3C_1$

$A_3B_1C_2$ $A_3B_2C_2$ $A_3B_3C_2$

$A_3B_1C_3$ $A_3B_2C_3$ $A_3B_3C_3$



C \ B		1	2	3
		A	1	2
1	1	2	3	
2	2	3	1	
3	3	1	2	

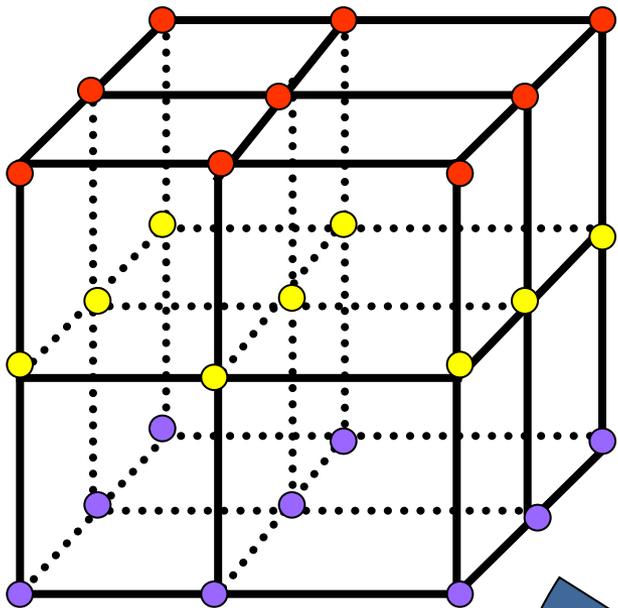
C \ B		B		
		1	2	3
A	1	1	2	3
	2	2	3	1
	3	3	1	2

9个点的组合

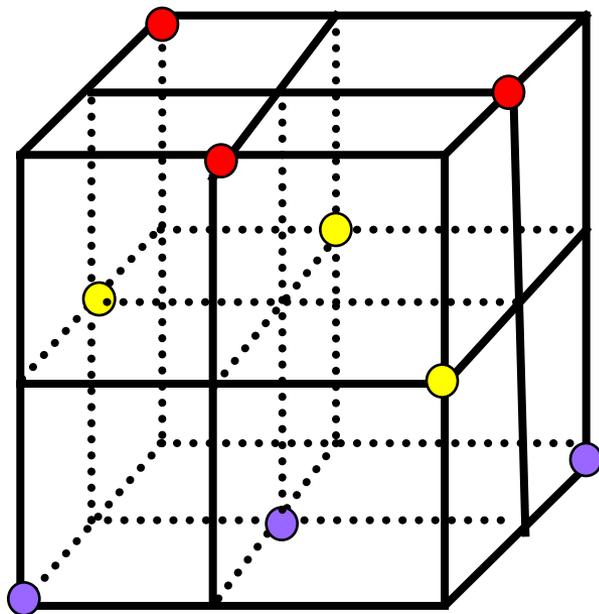
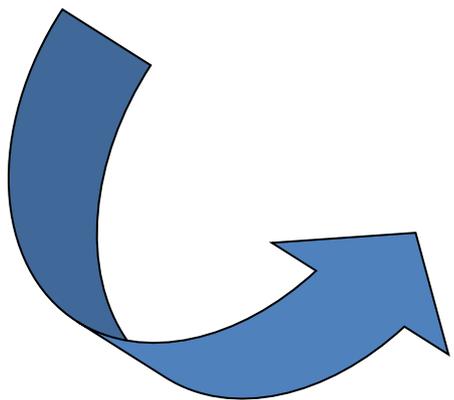
A的每个水平与B、C的各个水平在试验中各搭配一次。

任一因素的每个水平都与另外2个因素的每个水平相组合且组合1次。

对于A、B、C 3个因素来说，在27个全面试验点中选择9个试验点，仅是全面试验的三分之一。



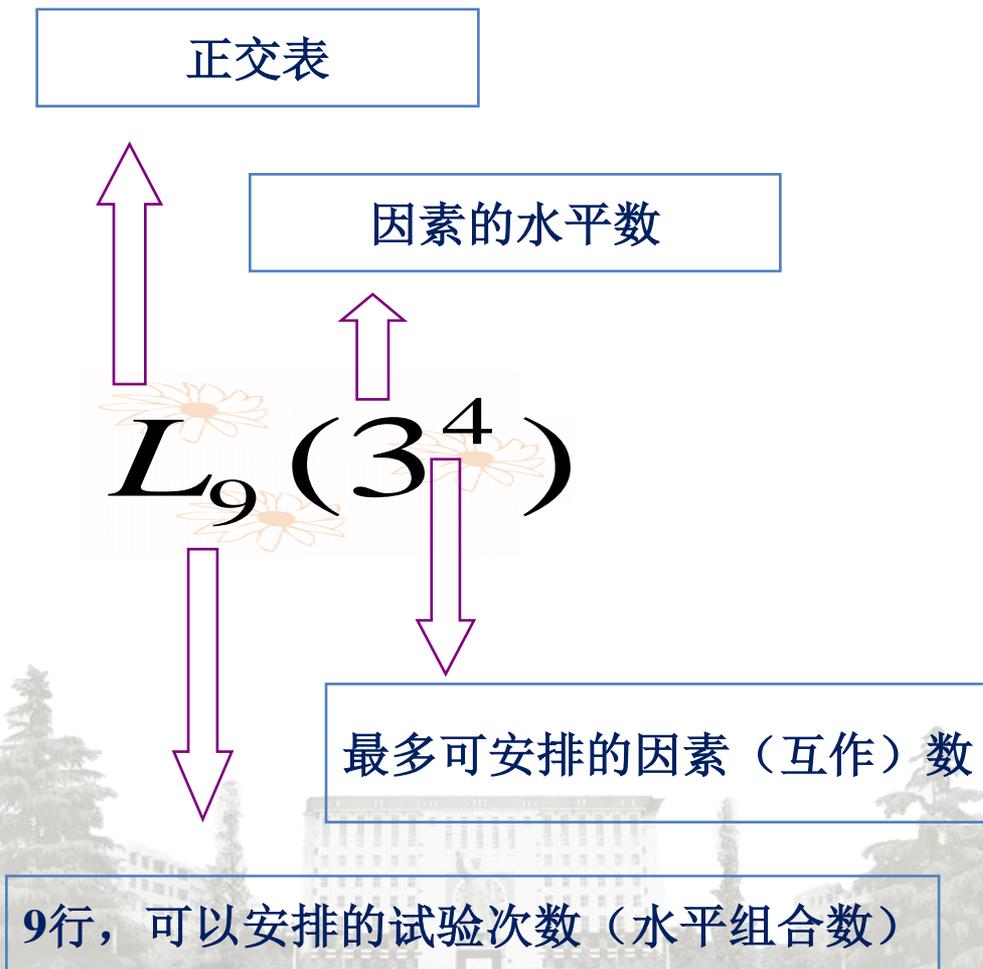
$L_9(3^4)$





1 正交设计的概念及原理

1.3 正交表及其性质



$L_9(3^4)$

试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

- 此表共有4列，可以安排4个因素；
- 每一列有1、2、3三种数字，代表各因素的不同水平；
- 表中有9行，代表9个不同处理组合。

$L_9(3^4)$

试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

 $L_8(2^7)$

试验号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

正交性

(1) 任一系列中，各水平都出现，且出现的次数相等。

(2) 任两列之间各种不同水平的所有可能组合都出现，且出现的次数相等。

即每个因素的一个水平与另一因素的各个水平所有可能组合次数相等，表明任意两列各个数字之间的搭配是均匀的。

$L_9(3^4)$

试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

 $L_8(2^7)$

试验号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

代表性

- (1) 任一列的各水平都出现，使得部分试验中包括了所有因素的所有水平；
- (2) 任两列的所有水平组合都出现，使任意两因素间的试验组合为全面试验。
- (3) 由于正交表的正交性，正交试验的试验点必然均衡地分布在全面试验点中，具有很强的代表性。因此，部分试验寻找的最优条件与全面试验所找的最优条件，应有一致的趋势。

$L_9(3^4)$

试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

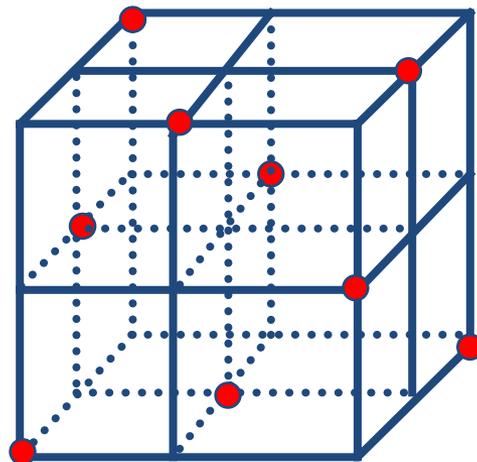
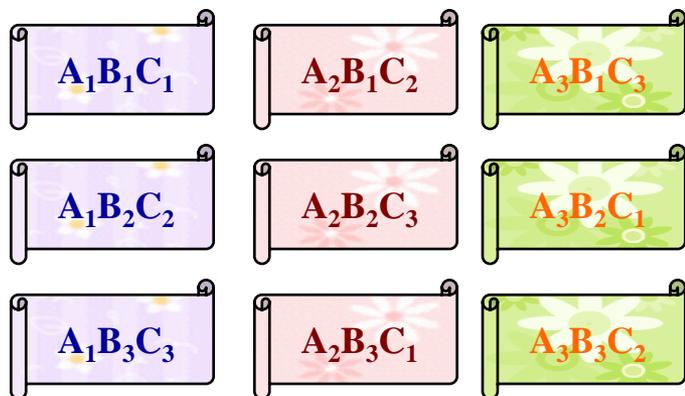
$L_8(2^7)$

试验号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

综合可比性

- (1) 任一列的各水平出现的次数相等；
- (2) 任两列间所有水平组合出现次数相等，使得任一因素各水平的试验条件相同。

这就保证了在每列因素各水平的效果中，最大限度地排除了其他因素的干扰。
从而可以综合比较该因素不同水平对试验指标的影响情况。



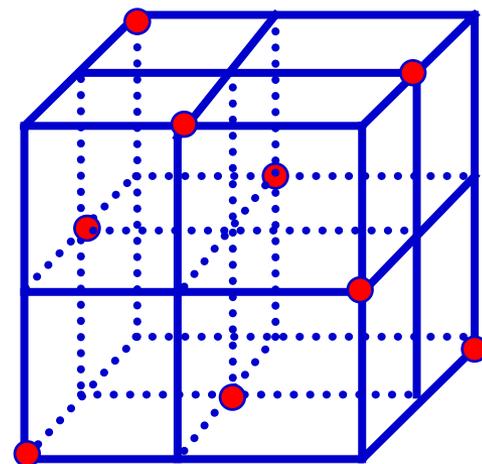
根据以上特性，我们用正交表安排的试验，
具有**均衡分散**和**整齐可比**的特点。

均衡分散

- 是指用正交表挑选出来的各因素水平组合在全部水平组合中的分布是均匀的。
- 这些点代表性强，能够较好地反映全面试验的情况。

整齐可比

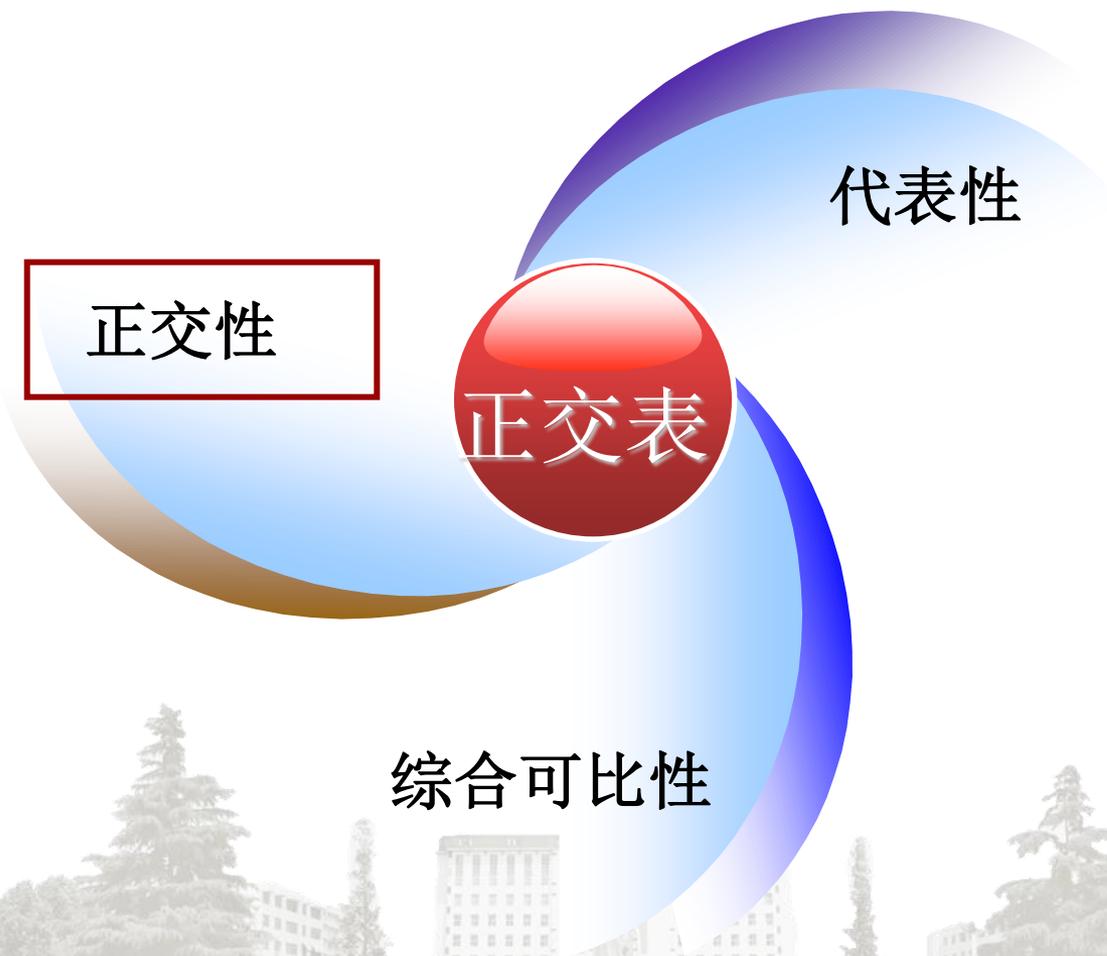
$A_1B_1C_1$	$A_2B_1C_2$	$A_3B_1C_3$
$A_1B_2C_2$	$A_2B_2C_3$	$A_3B_2C_1$
$A_1B_3C_3$	$A_2B_3C_1$	$A_3B_3C_2$



- 指每一个因素的各水平间具有可比性。
- 正交表中每一因素的任一水平下都均衡地包含着另外因素的各个水平，当比较某因素不同水平时，其它因素的效应都彼此抵消。
- 在A、B、C 3个因素中，
- A因素的3个水平 A_1 、 A_2 、 A_3 条件下各有B、C的 3个不同水平，即：在这9个水平组合中，A因素各水平下包括了B、C因素的3个水平，当比较A因素不同水平时，B、C因素不同水平的效应相互抵消。因此，A因素3个水平间具有可比性。
- 同样，B、C因素3个水平间亦具有可比性。

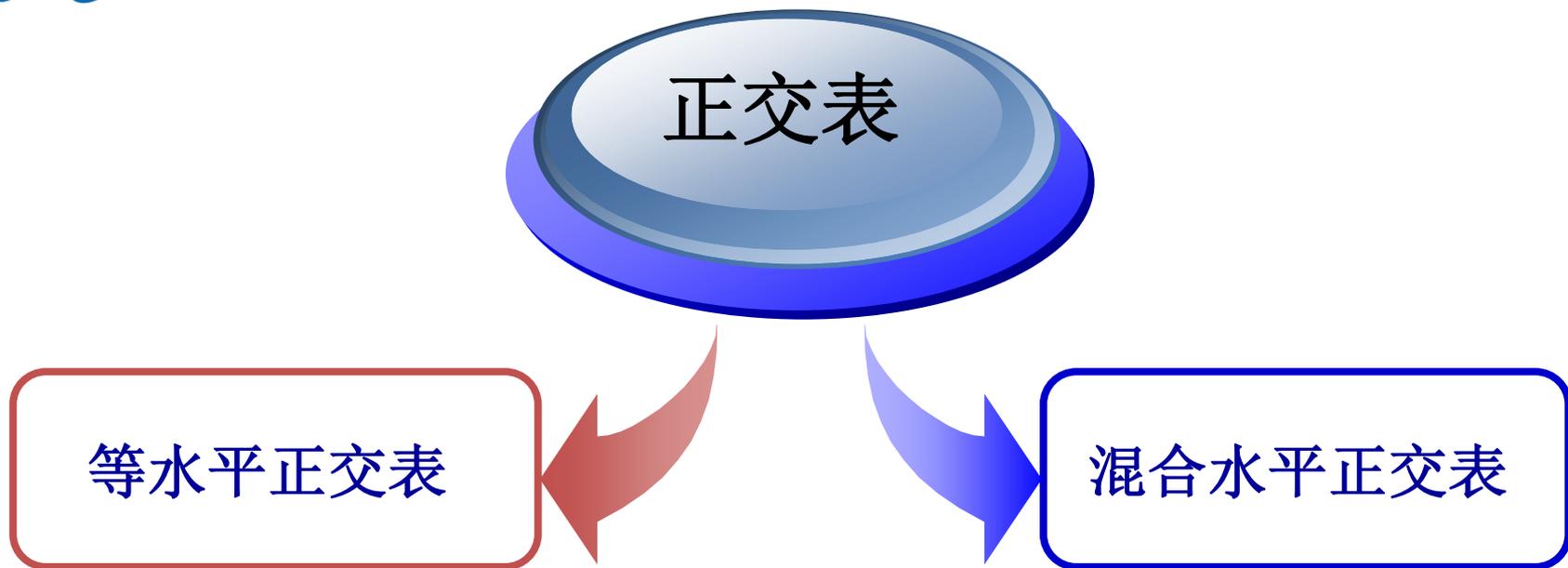


1 正交设计的概念及原理





1.4 正交表的类别



各列水平数相同的正交表称为等水平正交表。

$L_4(2^4)$

$L_8(2^7)$

$L_{12}(2^{11})$



2水平正交表

$L_9(3^4)$

$L_{27}(3^{13})$

$L_{18}(3^7)$



3水平正交表

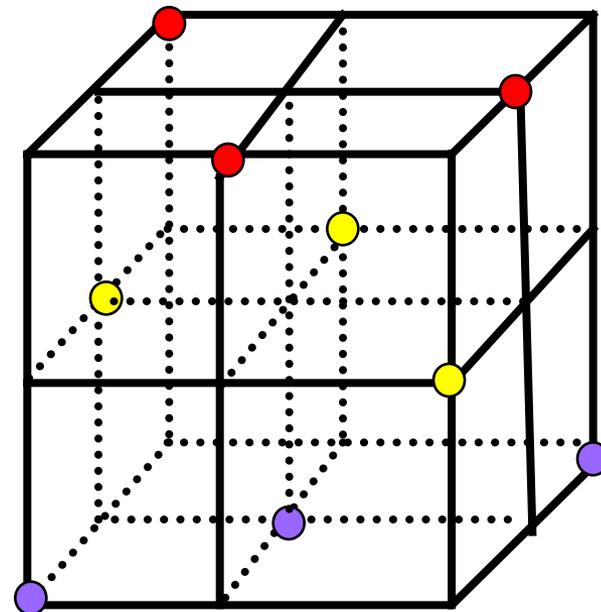
		$L_8(4 \times 2^4)$				
列号		1	2	3	4	5
试验号						
1		1	1	1	1	1
2		1	2	2	2	2
3		2	1	1	2	2
4		2	2	2	1	1
5		3	1	2	1	2
6		3	2	1	2	1
7		4	1	2	2	1
8		4	2	1	1	2

有1列的水平数为4，有4列水平数为2。

也就是说该表可以安排1个4水平因素和4个2水平因素。

$$L_8(4^1 \times 2^4)$$

基本程序



- 正交试验是用部分试验来代替全面试验的，它不可能像全面试验那样对各因素效应、交互作用一一分析；
- 当交互作用存在时，有可能出现交互作用的混杂。
- 虽然正交试验设计有上述不足，但它能通过部分试验找到最优水平组合，因而应用广泛。



正交设计

1

正交设计的概念及原理

2

正交设计的基本程序

3

正交设计的结果分析

2.1

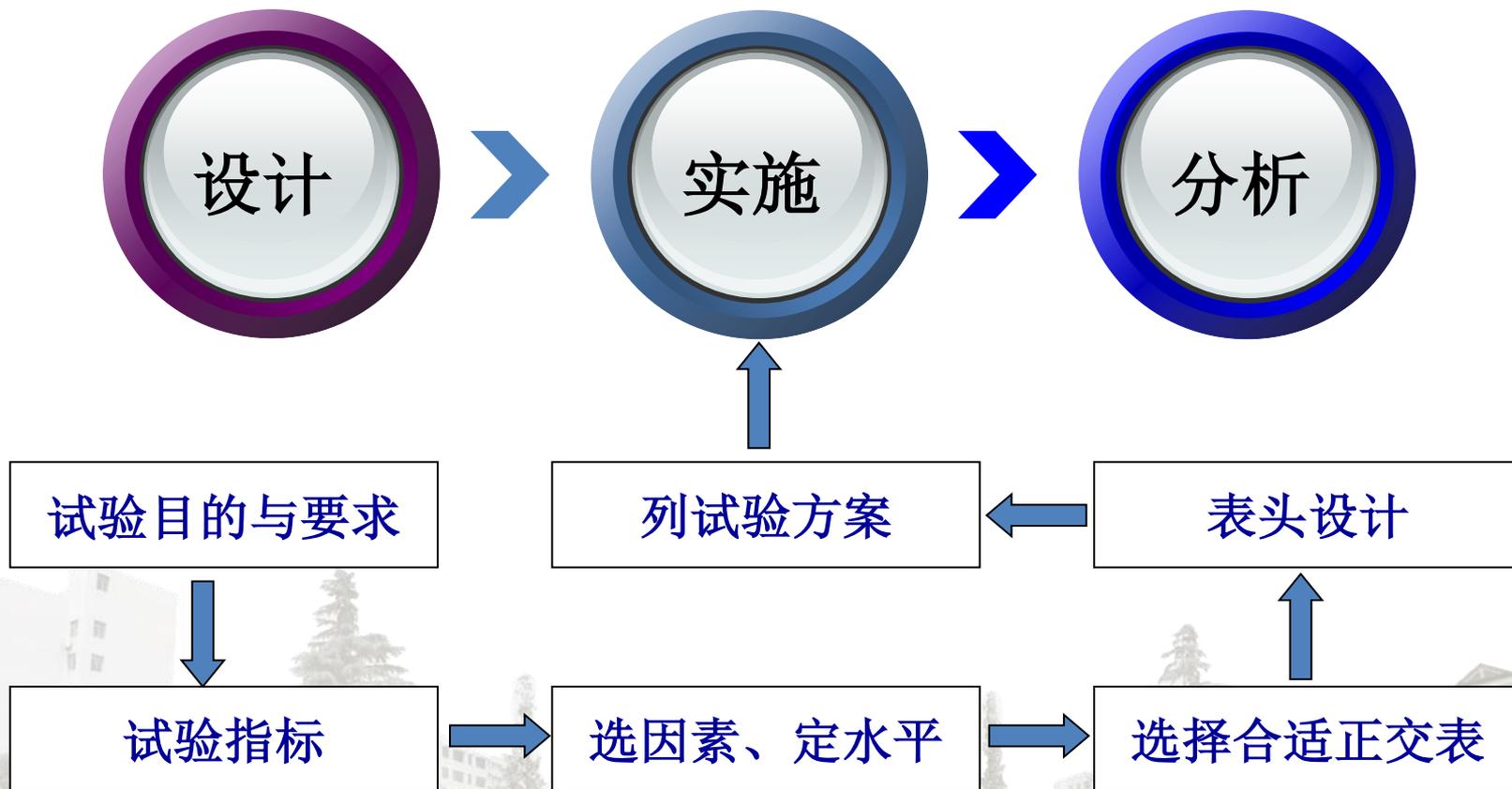
方案设计

2.2

结果分析



2 正交设计的基本程序





2 正交设计的基本程序

实例分析1

为提高山楂原料的利用率，
研究酶法液化工艺制造山楂原汁，
拟通过正交试验来寻找酶法液化的最佳工艺条件。





2.1 正交方案设计

(1) 明确试验目的，确定试验指标

- 试验设计前必须明确**试验目的**，即本次试验要解决什么问题。
- 试验目的确定后，对试验结果如何衡量，即需要确定出**试验指标**。
- 试验指标可为**定量**指标，也可为**定性**指标。



2.1 正交方案设计

- 对本试验而言，试验目的是为了**提高山楂原料的利用率**。
- 以**液化率**为试验指标，来评价液化工艺条件的好坏。
- 液化率越高，山楂原料利用率就越高。

$$\text{液化率}(\%) = \frac{(\text{果肉重量} - \text{液化后残渣重量})}{\text{果肉重量}} \times 100$$



2.1 正交方案设计

(2) 选因素、定水平，列因素水平表

- 根据专业知识、以往的研究结论和经验，从影响试验指标的诸多因素中，通过因果分析筛选出需要考察的**试验因素**。
- 一般确定试验因素时，应以对试验指标影响大的因素、尚未考察过的因素、尚未完全掌握其规律的因素为先。





- 对本试验分析，影响山楂液化率的因素很多，如山楂品种、山楂果肉的破碎度、果肉加水量、原料pH值、果胶酶种类、加酶量、酶解温度、酶解时间等等。
- 经全面考虑，最后确定果肉加水量、加酶量、酶解温度和酶解时间为本试验的试验因素，分别记作A、B、C和D，进行4因素正交试验。



(2) 选因素、定水平，列因素水平表

- 确定每个因素的水平，一般以**2-4**水平为宜。
- **4**个因素：果肉加水量、加酶量、酶解温度、酶解时间
- 各因素均取**3**个水平，因素水平表如下表所示。

表1 山楂液化率研究因素水平表

水平	试验因素			
	加水量 (mL/100g) A	加酶量 (mL/100g) B	酶解温度 (°C) C	酶解时间 (h) D
1	10	1	20	1.5
2	50	4	35	2.5
3	90	7	50	3.5



2.1 正交方案设计

(3) 选择合适的正交表

- ✓ 正交表的选择是正交试验设计的首要问题。
- ✓ 根据因素、水平及需要考察的交互作用的多少来选择合适的正交表。
- ✓ 正交表的选择原则是在能够安排下试验因素和交互作用的前提下，尽可能选用较小的正交表，以减少试验次数。



2.1 正交方案设计

(3) 选择合适的正交表

- ✓ 试验因素的水平数 **=** 正交表中的水平数；
- ✓ 因素个数（包括交互作用） **≤** 正交表的列数；
- ✓ 各因素及交互作用的自由度之和 **<** 所选正交表的总自由度，
以便估计试验误差。
- ✓ 若各因素及交互作用的自由度之和 **=** 所选正交表总自由度，
则可采用**有重复正交试验**来估计试验误差。



2.1 正交方案设计

正交表选择依据

列数

正交表的列数 $c \geq$
因素所占列数 + 交互作用所占列数 + 空列。

自由度

正交表的总自由度 $(n-1) \geq$
因素自由度 + 交互作用自由度 + 误差自由度。

- ✓ 此例有4个3水平因素，
- ✓ 若仅考察4个因素对液化率的影响效果，不考察因素间的交互作用，故可选用 $L_9(3^4)$ 正交表。
- ✓ 若要考察交互作用，则应选用 $L_{27}(3^{13})$ 。



2.1 正交方案设计

(4) 表头设计

- **所谓表头设计**，就是把试验因素和要考察的交互作用分别安排到正交表的各列中去的**过程**。
- 在不考察交互作用时，各因素可随机安排在各列上；
- 若考察交互作用，就应按所选正交表的交互作用列表安排各因素与交互作用，以防止设计“混杂”。



2.1 正交方案设计

(4) 表头设计

- 此例不考察交互作用，
- 可将加水量(A)、加酶量(B)和酶解温度 (C)、酶解时间 (D) 依次安排在 $L_9(3^4)$ 的第1、2、3、4列上，如下表所示。

表2 山楂液化工工艺研究表头设计

列号	1	2	3	4
因素	A	B	C	D



2.1 正交方案设计

(5) 编制试验方案，按方案进行试验，记录试验结果。

把正交表中安排各因素的列（不包含欲考察的交互作用列）中的每个水平数字换成该因素的实际水平值，便形成了正交试验方案。

表3 山楂液化工工艺研究试验方案及试验结果

试验号	因 素				试验结果 (液化率 %)
	A (加水量)	B (加酶量)	C (酶解温度)	D (酶解时间)	
1	1 (10)	1 (1)	1 (20)	1(1.5)	0
2	1	2 (4)	2 (35)	2(2.5)	17
3	1	3 (7)	3 (50)	3(3.5)	24
4	2 (50)	1	2	3	12
5	2	2	3	1	47
6	2	3	1	2	28
7	3 (90)	1	3	2	1
8	3	2	1	3	18
9	3	3	2	1	42

- ◆ 试验号并非试验顺序，为了排除误差干扰，试验中可随机进行；
安排试验方案时，部分因素的水平可采用随机安排。



3 结果分析

- 分清各因素及其交互作用的主次顺序（分清哪个是主要因素，哪个是次要因素）；
- 判断因素对试验指标影响的显著程度；
- 找出试验因素的优水平和试验范围内的最优组合（即试验因素各取什么水平时，试验指标最好）；
- 分析因素与试验指标之间的关系（即当因素变化时，试验指标是如何变化的。找出指标随因素变化的规律和趋势，为进一步试验指明方向）；
- 分析各因素之间的交互作用情况；
- 估计试验误差的大小。

极差分析
方差分析



正交设计

1

正交设计的概念及原理

2

正交设计的基本程序

3

正交设计的结果分析

3.1

极差分析

3.2

方差分析



正交设计

正交设计

3.1 极差分析

3.2 方差分析

3.1.1 不考察交互作用

3.1.2 考察交互作用

3.2.1 不考虑交互作用等水平方差分析

3.2.2 考虑交互作用等水平方差分析

3.2.3 重复试验的方差分析

3.2.4 重复取样的方差分析



3.1 极差分析

计算简便，直观，简单易懂，
是正交试验结果分析最常用方法。



表3 山楂液化工工艺研究试验方案及试验结果

试验号	因素				试验结果 (液化率 %)
	A (加水量)	B (加酶量)	C (酶解温度)	D (酶解时间)	
1	1 (10)	1 (1)	1 (20)	1(1.5)	0
2	1	2 (4)	2 (35)	2(2.5)	17
3	1	3 (7)	3 (50)	3(3.5)	24
4	2 (50)	1	2	3	12
5	2	2	3	1	47
6	2	3	1	2	28
7	3 (90)	1	3	2	1
8	3	2	1	3	18
9	3	3	2	1	42

K_{jm}

第j列因素m水平所对应的试验指标和与平均值。

\overline{K}_{jm}

第j列因素优水平

优水平

表3 山楂液化工工艺研究试验方案及试验结果

试验号	因素				试验结果 (液化率%)
	A (加水量)	B (加酶量)	C (酶解温度)	D (酶解时间)	
1	1 (10)	1 (1)	1 (20)	1(1.5)	0
2	1	2 (4)	2 (35)	2(2.5)	17
3	1	3 (7)	3 (50)	3(3.5)	24
4	2 (50)	1	2	3	12
5	2	2	3	1	47
6	2	3	1	2	28
7	3 (90)	1	3	2	1
8	3	2	1	3	18
9	3	3	2	1	42

R_j

- 第j列因素的极差，第j列因素水平波动时，试验指标的变动幅度。
- R_j 越大，说明该因素对试验指标的影响越大。
- 根据 R_j 大小，可以判断因素的主次顺序。



3.1 极差分析 (R法)

极差分析法—R法

1. 计算

K_{jm}, \bar{k}_{jm}

R_j

因素主次

2. 判断

优水平

优组合



3.1 极差分析 (R法)

3.1.1 不考察交互作用的结果分析





(1) 确定试验因素的优水平和最优水平组合

试验号	因素				试验结果 (液化率 %)
	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	0
2	1	2	2	2	17
3	1	3	3	3	24
4	2	1	2	3	12
5	2	2	3	1	47
6	2	3	1	2	28
7	3	1	3	2	1
8	3	2	1	3	18
9	3	3	2	1	42

试验号	因素				试验结果 (液化率 %)
	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	0
2	1	2	2	2	17
3	1	3	3	3	24
4	2	1	2	3	12
5	2	2	3	1	47
6	2	3	1	2	28
7	3	1	3	2	1
8	3	2	1	3	18
9	3	3	2	1	42

$$K_{A_1} = y_1 + y_2 + y_3 = 0 + 17 + 24 = 41$$

$$\bar{K}_{A_1} = \frac{K_{A_1}}{3} = 13.7$$

试验号	因素				试验结果 (液化率 %)
	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	0
2	1	2	2	2	17
3	1	3	3	3	24
4	2	1	2	3	12
5	2	2	3	1	47
6	2	3	1	2	28
7	3	1	3	2	1
8	3	2	1	3	18
9	3	3	2	1	42

$$K_{A_2} = y_4 + y_5 + y_6 = 12 + 47 + 28 = 87$$

$$\bar{K}_{A_2} = \frac{K_{A_2}}{3} = 29$$

试验号	因素				试验结果 (液化率 %)
	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	0
2	1	2	2	2	17
3	1	3	3	3	24
4	2	1	2	3	12
5	2	2	3	1	47
6	2	3	1	2	28
7	3	1	3	2	1
8	3	2	1	3	18
9	3	3	2	1	42

$$K_{A_3} = y_7 + y_8 + y_9 = 1 + 18 + 42 = 61$$

$$\bar{K}_{A_3} = \frac{K_{A_3}}{3} = 20.3$$

试验号	因素			试验结果 (液化率 %)
	A	D		
1	1	$\bar{K}_{A_1} = \frac{K_{A_1}}{3} = 13.7$		0
2	1	1	2	17
3	1	2	3	24
4	2	$\bar{K}_{A_2} = \frac{K_{A_2}}{3} = 29.0$		12
5	2	1	2	47
6	2	3	2	28
7	3	$\bar{K}_{A_3} = \frac{K_{A_3}}{3} = 20.3$		1
8	3	1	3	18
9	3	2	3	42

- 根据正交设计的特性，对**A**₁、**A**₂、**A**₃来说，三组试验的试验条件是完全一样的（综合可比性），可进行直接比较。
- 如果因素**A**对试验指标无影响时，那么**k**_{A1}、**k**_{A2}、**k**_{A3}应该相等。
- 由计算可见，**k**_{A1}、**k**_{A2}、**k**_{A3}实际上不相等。说明，**A**因素的水平变动对试验结果有影响。

试验号	因素				试验结果 (液化率 %)
	A	B	C	D	
1	1				0
2	1				17
3	1				24
4	2				12
5	2				47
6	2				28
7	3				1
8	3				18
9	3				42

- 根据 k_{A1} 、 k_{A2} 、 k_{A3} 的大小可以判断 A_1 、 A_2 、 A_3 对试验指标的影响大小。
- 由于试验指标为液化率，而 $k_{A2} > k_{A3} > k_{A1}$ ，所以可断定 A_2 为A因素的优水平。

试验号	因素				试验结果 (液化率 %)
	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	0
2	1	2	2	2	17
3	1	3	3	3	24
4	2	1	2	3	12
5	2	2	3	1	47
6	2	3	1	2	28
7	3	1	3	2	1
8	3	2	1	3	18
9	3	3	2	1	42

同理，可以计算并确定**B**、**C**、**D**因素的优水平。

表4 山楂液液化工艺研究试验结果分析

试验号	因素				液化率%
	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	0
2	1	2	2	2	17
3	1	3	3	3	24
4	2	1	2	3	12
5	2	2	3	1	47
6	2	3	1	2	28
7	$A_2B_2C_3D_1$		3	2	1
8			1	3	18
9			2	1	42
K_1	41	13	46	89	
K_2	87	82	71	46	
K_3	61	94	72	54	
k_1	13.7	4.3	15.3	29.7	$A_2B_3C_3D_1$
k_2	29.0	27.3	23.7	15.3	
k_3	20.3	31.3	24.0	18.0	



(2) 确定因素的主次顺序

根据极差 R_j 的大小，可以判断各因素对试验指标的影响主次。



表4 山楂液化工工艺研究试验结果分析

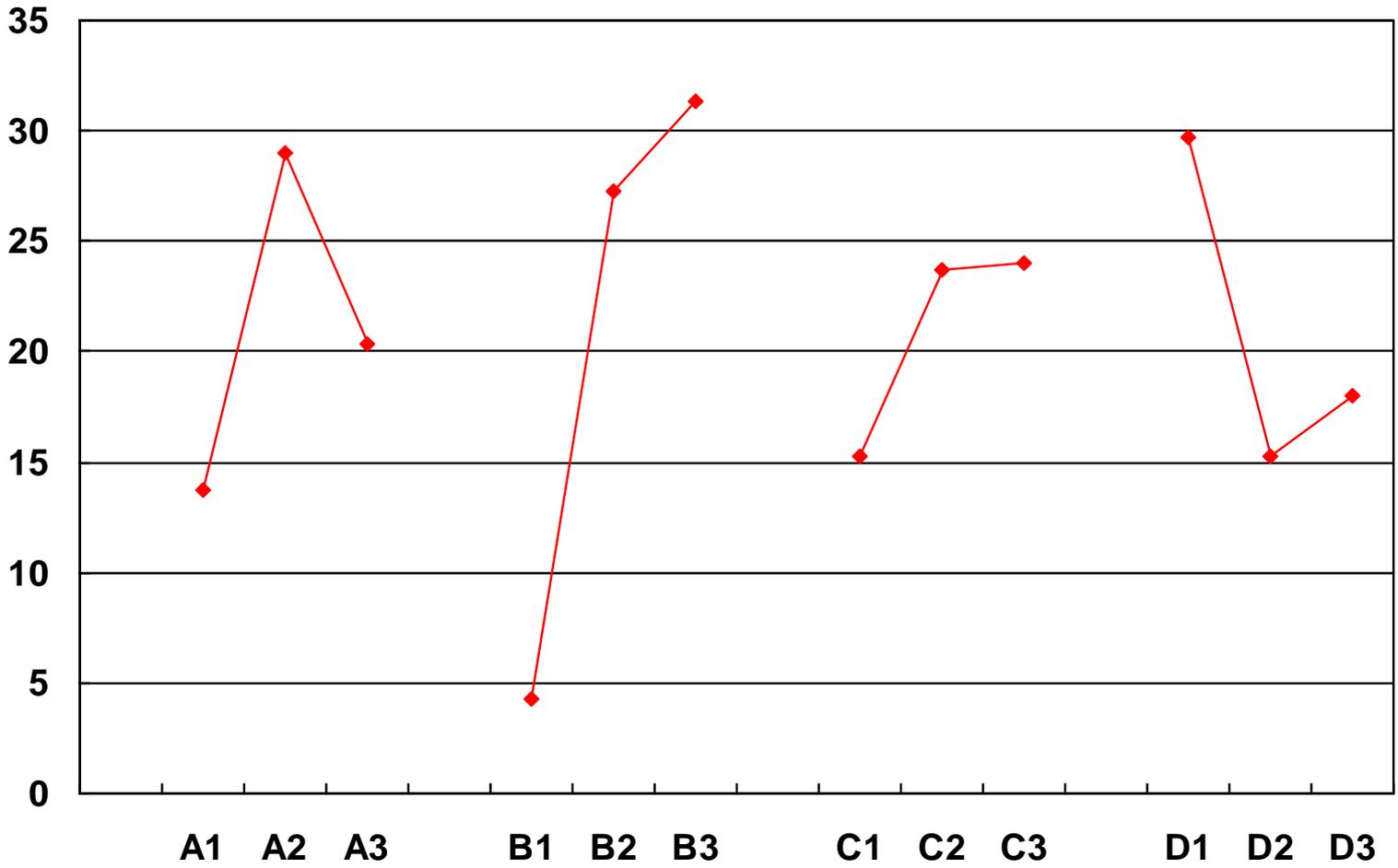
试验号	因素				液化率%
	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	0
2	1	2	2	2	17
3	1	3	3	3	24
4	2	1	2	3	12
5	2	2	3	1	47
6	2	3	1	2	28
7	3	1	3	2	1
8	3	2	1	3	18
9	3	3	2	1	42
K_1	41	13	46	89	
K_2	87	82	71	46	
K_3	61	94	72	54	
k_1	13.7	4.3	15.3	29.7	
k_2	29.0	27.3	23.7	15.3	
k_3	20.3	31.3	24.0	18.0	
极差R	15.3	27.0	8.7	14.3	
主次顺序	B>A>D>C				
优水平	A_2	B_3	C_3	D_1	
优组合	$A_2B_3C_3D_1$				



(3) 绘制因素与指标趋势图

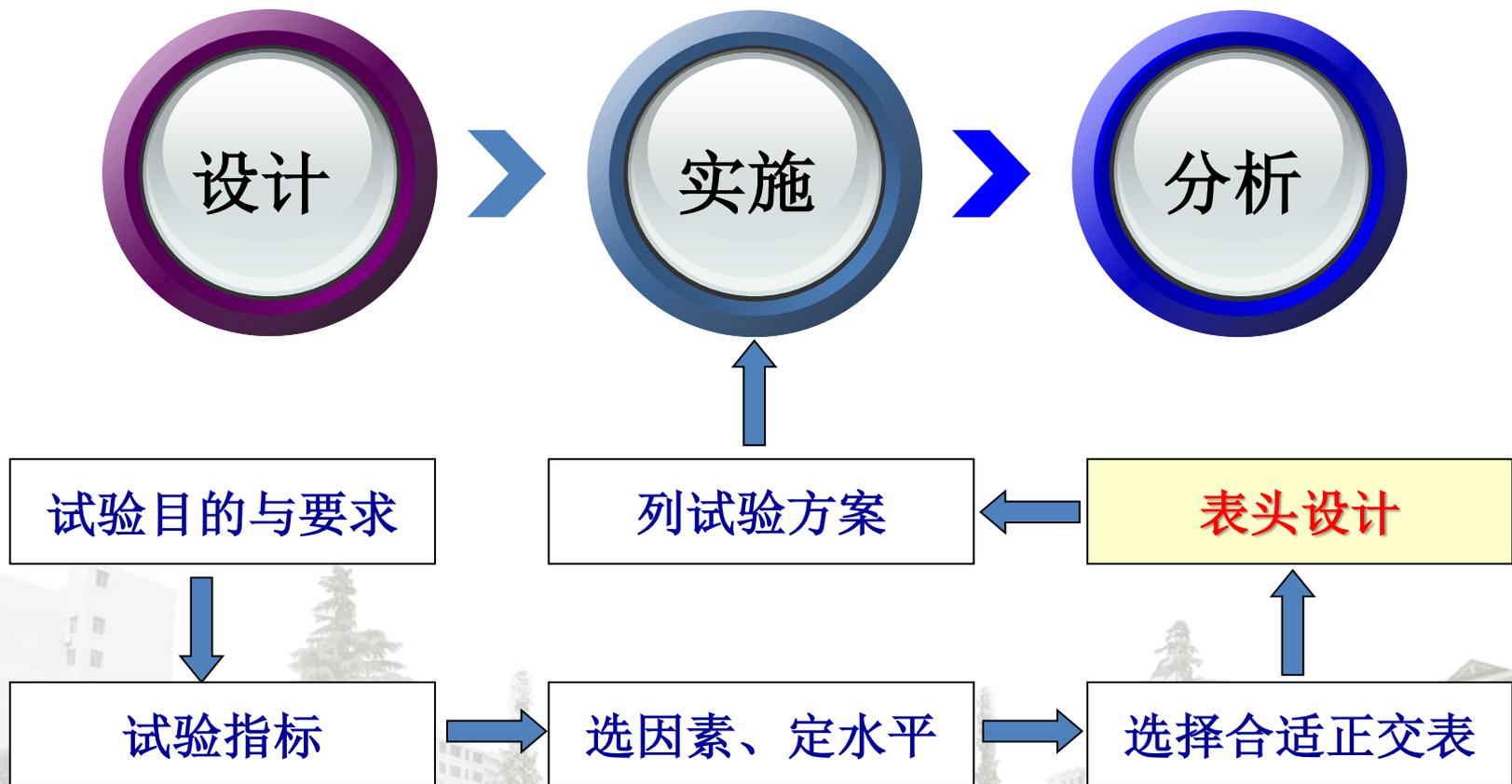
- 以各因素水平为横坐标，
- 试验指标的平均值 (k_{jm}) 为纵坐标，绘制因素与指标趋势图。
- 由因素与指标趋势图可以更直观地看出试验指标随着因素水平的变化而变化的趋势，可为进一步试验指明方向。







正交设计的基本程序





正交设计

正交设计

3.1 极差分析

3.2 方差分析

3.1.1 不考察交互作用

3.1.2 考察交互作用

3.2.1 不考虑交互作用等水平方差分析

3.2.2 考虑交互作用等水平方差分析

3.2.3 重复试验的方差分析

3.2.4 重复取样的方差分析

3.1.2 考察交互作用的正交设计及结果分析

- 因素之间的交互作用总是存在的，这是客观存在的普遍现象，只不过交互作用的程度不同而异。
 - 因素A、B间的交互作用记作 $A \times B$ ，称为1级交互作用；
 - 因素A、B、C之间的交互作用记作 $A \times B \times C$ ，称为2级交互作用；
 - 依此类推，还有3级、4级交互作用等。
- 当交互作用很小时，可以认为因素间不存在交互作用。
- 对于交互作用，正交设计时应引起高度重视。

3.1.2 考察交互作用的正交设计及结果分析

交互作用的处理原则

- 正交设计中，交互作用一律当作因素看待。
- 作为因素，各级交互作用都可以安排在能考察交互作用的正交表的相应列上，它们对试验指标的影响情况都可以分析清楚，而且计算非常简单。

交互作用与因素不同

- ① 用于考察交互作用的列不影响试验方案及其实施；
- 交互作用不是具体的因素，而是因素间的搭配作用，也就不存在水平。
- 交互作用所占的列在试验方案是不起作用的，即起不到试验因素参加试验的作用，
- 但对指标有影响，在分析结果时，可以把它看成是一个单独的因素进行极差的计算，以反映其交互作用的大小。

交互作用与因素不同

- ② 交互作用并不一定只占正交表的一列，交互作用所占列数与因素的水平 m 有关，与交互作用级数 p 有关。

对一个 2^5 因素试验，表头设计时，如果考虑所有各级交互作用，那么连同因素本身，总计应占列数为：

$$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

$$\text{全面实施 } 2^5 = 32$$

一般对于多因素试验，在满足试验要求的条件下，有选择地、合理地考察某些交互作用。



综合考虑试验目的、专业知识、以往的经验及现有试验条件等多方面情况进行交互作用选择。

一般原则是：

- ① 忽略高级交互作用
- ② 有选择地考察一级交互作用。通常只考察那些作用效果较明显的，或试验要求必须考察的。
- ③ 试验允许的条件下，试验因素尽量取2水平。



表头设计

表头设计时，各因素及其交互作用不能任意安排，必须严格按照交互作用列表进行安排。

在表头设计中，为了避免混杂，主要因素、重点要考察的因素、涉及交互作用较多的因素，应该优先安排，次要因素、不涉及交互作用的因素后安排。

混杂，就是指在正交表的同列中，安排了两个或两个以上的**因素或交互作用**，这样，就无法区分同一列中这些不同因素或交互作用对试验指标的影响效果。



实例分析2

某一种抗菌素的发酵培养基由**A**、**B**、**C**三种成分组成，
各有**2**个水平，
除考察**A**、**B**、**C**三个因素的主效外，
还考察**A**与**B**、**B**与**C**的交互作用。

$$L_8(2^7)$$

本试验有3个2水平的因素和两个交互作用需要考察，
各项自由度之和为： $3 \times (2-1) + 2 \times (2-1) \times (2-1) = 5$

(1) 选用正交表，进行表头设计

$L_8(2^7)$

为两因素交互作用所占的列

该正交表中有**基本列**和**交互列**之分，

各因素所占的列

$L_8(2^7)$ 二列间交互作用列表

列号	A 1	B 2	AB 3	C 4	AC 5	BC 6	7
1	(1)	3	2	5	4	7	6
2		(2)	1	6	7	4	5
3			(3)	7	6	5	4
4				(4)	1	2	3
5					(5)	3	2
6						(6)	1

- ◆ 如果将**A**因素放在第1列，**B**因素放在第2列，查表可知，第1列与第2列的交互作用列是第3列，于是将**A**与**B**的交互作用**A×B**放在第3列。
- ◆ 这样第3列不能再安排其它因素，以免出现“混杂”。
- ◆ 然后将**C**放在第4列，
- ◆ **B×C**应放在第6列，
- ◆ 余下列为空列，如此可得表头设计。

$L_8(2^7)$ 二列间交互作用列表

列号	A 1	B 2	AB 3	C 4	AC 5	BC 6	7
1	(1)	3	2	5	4	7	6
2		(2)	1	6	7	4	5
3			(3)	7	6	5	4
4				(4)	1	2	3
5					(5)	3	2
6						(6)	1

为了满足试验的某些要求，或为了减少试验次数，

- 允许一级交互作用出现混杂，
- 允许次要因素与高级交互作用混杂，
- 但一般不允许因素与一级交互作用混杂。

表头设计

列号	1	2	3	4	5	6	7
因素	A	B	A×B	C	空	B×C	空

(2) 列出试验方案

根据表头设计，

将A、B、C各列对应的数字“1”、“2”换成各因素的具体水平，

得出试验方案。

正交试验方案

试验号	因素		
	1(A)	2(B)	4(C)
1	1(A ₁)	1(B ₁)	1(C ₁)
2	1(A ₁)	1(B ₁)	2(C ₂)
3	1(A ₁)	2(B ₂)	1(C ₁)
4	1(A ₁)	2(B ₂)	2(C ₂)
5	2(A ₂)	1(B ₁)	1(C ₁)
6	2(A ₂)	1(B ₁)	2(C ₂)
7	2(A ₂)	2(B ₂)	1(C ₁)
8	2(A ₂)	2(B ₂)	2(C ₂)

(3) 结果分析

按表所列的试验方案进行试验，

其结果分析与前面并无本质区别，

- 交互依因素处理进行分析；
- 根据互作效应，选择优化组合。



实例分析2

某一种抗菌素的发酵培养基由**A**、**B**、**C**三种成分组成，各有**2**个水平，

考察**A**、**B**、**C**三个因素的主效外，

还考察**A**与**B**、**B**与**C**的交互作用。

$$L_4(2^3)$$

$$L_8(2^7)$$

列号	1	2	3	4	5	6	7
因素	A	B	A×B	C	空	B×C	空

$L_8(2^7)$

试验实施?

试验号	A	B	A×B	C	空列	B×C	空列
1	1	1		1			
2	1	1		2			
3	1	2		1			
4	1	2		2			
5	2	1		1			
6	2	1		2			
7	2	2		1			
8	2	2		2			

试验号	A	B	A×B	C	空列	B×C	空列
1	1	1		1			
2	1	1		2			
3	1	2		1			
4	1	2		2			
5	2	1		1			
6	2	1		2			
7	2	2		1			
8	2	2		2			

正交试验方案

试验号	因素		
	1(A)	2(B)	4(C)
1	1(A ₁)	1(B ₁)	1(C ₁)
2	1(A ₁)	1(B ₁)	2(C ₂)
3	1(A ₁)	2(B ₂)	1(C ₁)
4	1(A ₁)	2(B ₂)	2(C ₂)
5	2(A ₂)	1(B ₁)	1(C ₁)
6	2(A ₂)	1(B ₁)	2(C ₂)
7	2(A ₂)	2(B ₂)	1(C ₁)
8	2(A ₂)	2(B ₂)	2(C ₂)

表5 抗菌素发酵培养基试验结果

试验号	A	B	A×B	C	空列	B×C	空列	试验结果
1	1	1		1				55
2	1	1		2				38
3	1	2		1				97
4	1	2		2				89
5	2	1		1				122
6	2	1		2				124
7	2	2		1				79
8	2	2		2				61

*试验结果以对照为**100**计。

数据分析

按表所列的试验方案进行试验，

其结果分析与前面并无本质区别，

把互作当成因素处理进行分析；

根据互作效应，选择优化组合。

表6 抗菌素发酵培养基试验结果的极差分析

试验号	A	B	A×B	C	空列	B×C	空列	试验结果
1	1	1		1				55
2	1	1		2				38
3	1	2		1				97
4	1	2		2				89
5	2	1		1				122
6	2	1		2				124
7	2	2		1				79
8	2	2		2				61
K1	279	339		353				
K2	386	326		312				
k1	69.75	84.75		88.25				
k2	96.50	81.50		78.00				
极差R	26.75	3.25		10.25				

极差分析

$A > C > B$

$A_2 B_1 C_1$

互作效应?

表6 抗菌素发酵培养基试验结果的极差分析

试验号	A	B	A×B	C	空列	B×C	空列	试验结果
1			1			1		55
2			1			2		38
3			2			2		97
4			2			1		89
5			2			1		122
6			2			2		124
7			1			2		79
8			1			1		61

表6 抗菌素发酵培养基试验结果的极差分析

试验号	A	B	A×B	C	空列	B×C	空列	试验结果
1			1			1		55
2			1			2		38
3			2			2		97
4			2			1		89
5			2			1		122
6			2			2		124
7			1			2		79
8			1			1		61
K1			233			327		
K2			432			338		
k1			58.25			81.75		
k2			108.00			84.50		
极差R			49.75			2.75		

$$A \times B > B \times C$$

表6 抗菌素发酵培养基试验结果的极差分析

试验号	A	B	A×B	C	空列	B×C	空列	试验结果
1	1	1	1	1		1		55
2	1	1	1	2		2		38
3	1	2	2	1		2		97
4	1	2	2	2		1		89
5	2	1	2	1		1		122
6	2	1	2	2		2		124
7	2	2	1	1		2		79
8								61
K1	对于试验指标影响较大的交互作用，							
K2	应列出二元表，计算两个因素不同搭配所对应的试验							
k1	指标平均值，以找出其优化搭配。							
k2								
极差R	26.75	3.25	49.75	10.25		2.75		
主次顺序	A×B > A > C > B > B×C							
优水平	A ₂	B ₁	C ₁					
优组合	A ₂ B ₁ C ₁							

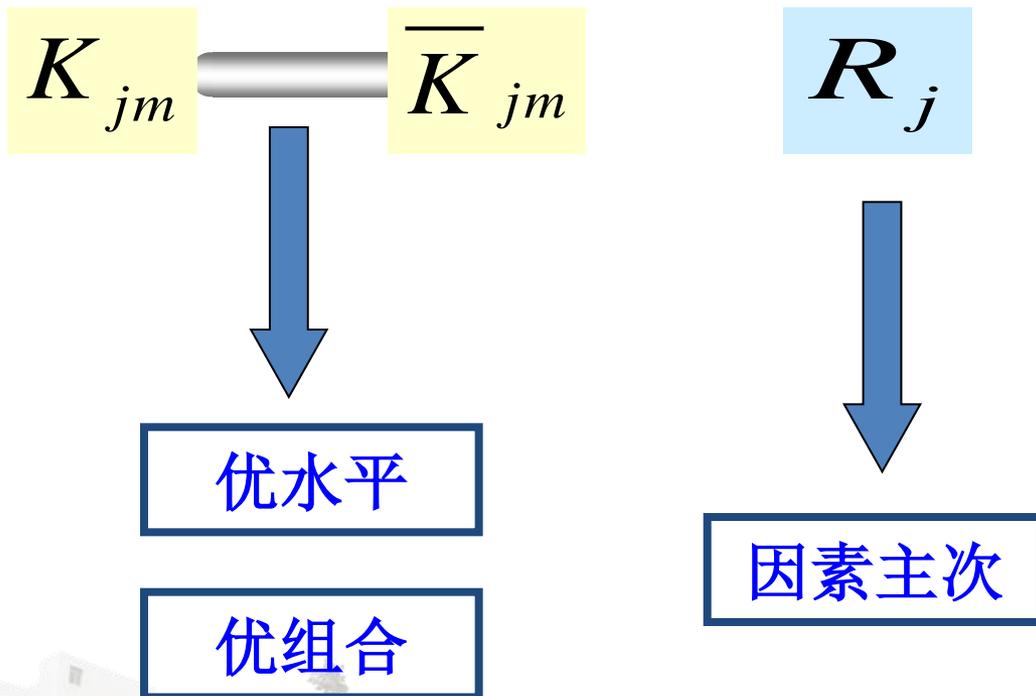
表6 抗菌素发酵培养基试验结果的极差分析

试验号	A	B	A×B	C	空列	B×C	空列	试验结果
1	1	1	1	1	1	1	1	55
2	1	1	1	2	2	2	2	38
3	1	2	2	1	1	2	2	97
4	1	2	2	2	2	1	1	89
5	2	1	2	1	2	1	2	122
6	2	1	2	2	1	2	1	124
7	2	2	1	1	2	2	1	79
8	2	2	1	2	1	1	2	61
K1	二元表						327	347
K2							338	318
k1	A ₁		B ₁		B ₂		1.75	86.75
k2			46.5		93		4.50	79.50
极差R			A ₂		123		70	
主次顺序								
优水平	A ₂	B ₁			C ₁			
优组合	A ₂ B ₁ C ₁							

*试验结果以对照为**100**计。



极差分析 (R 法)



- 判断因素对试验指标影响的显著程度;
- 估计试验误差的大小。

方差分析



正交试验数据----方差分析

方差分析基本思想

- 将数据的总变异分解成**处理**引起的变异和**误差**引起的变异，
- 构造 **F** 统计量，
- 进行 **F** 检验，
- 推断处理是否显著。

$$F = \frac{s_t^2}{s_e^2}$$

空列

所选正交表应留出一定空列，以估计试验误差。

表7 组内观测次数相等的单因素方差分析 (k 个处理, n 次重复)

变异来源	df	SS	s^2	F
处理间	$k - 1$	SS_t	s_t^2	$\frac{s_t^2}{s_e^2}$
处理内	$k(n-1)$	$SS_e = SS_T - SS_t$	s_e^2	
总变异	$nk - 1$	SS_T		

$$SS_T = \sum (x - \bar{x})^2 = \sum x^2 - C$$

$$C = \frac{T^2}{nk}$$

$$SS_t = n \sum (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = n \sum (\bar{x}_i)^2 - C = \frac{\sum T_i^2}{n} - C$$

表7 组内观测次数相等的单因素方差分析 (k 个处理, n 次重复)

变异来源	df	SS	s^2	F
处理间	$k - 1$	SS_t	s_t^2	$\frac{s_t^2}{s_e^2}$
处理内	$k(n - 1)$	$SS_e = SS_T - SS_t$	s_e^2	
总变异	$nk - 1$	SS_T		

$F?$

$$F > F_\alpha$$

$$F < F_\alpha$$

正交设计方差分析的几点说明

F检验时，要用误差平方和 SS_e 及其自由度 df_e 。

因此，为进行方差分析，所选正交表应留出一定空列。当无空列时，应进行重复试验，以估计试验误差。

误差自由度一般不应小于**2**， df_e 很小，**F**检验灵敏度很低，有时即使因素对试验指标有影响，**F**检验也判断不出来。

为了增大 df_e ，提高**F**检验的灵敏度，在进行显著性检验之前，先将各因素和交互作用的方差与误差方差比较，若 $MS_{\text{因}} (MS_{\text{交}}) < 2MS_e$ ，可将这些因素或交互作用的平方和、自由度并入误差项的平方和、自由度，这样使误差项的平方与自由度增大，提高了**F**检验的灵敏度。

表8 $L_9(3^4)$ 正交表试验设计及结果

处理号	第1列 (A)	第2列	第3列	第4列	试验结果y
1	1	1	1	1	y_1
2	1	2	2	2	y_2
3	1	3	3	3	y_3
4	2	1	2	3	y_4
5	2	2	3	1	y_5
6	2	3	1	2	y_6
7	3	1	3	2	y_7
8	3	2	1	3	y_8
9	3	3	2	1	y_9

分析第**1**列，其它列暂不考虑。

表8 $L_9(3^4)$ 正交表试验设计及结果

处理号	第1列 (A)	第2列	第3列	第4列	试验结果 y_i	
1	1	1	1	1	y_1	} A_1 3次重复值
2	1	2	2	2	y_2	
3	1	3	3	3	y_3	
4	2	1	2	3	y_4	} A_2 3次重复值
5	2	2	3	1	y_5	
6	2	3	1	2	y_6	
7	3	1	3	2	y_7	} A_3 3次重复值
8	3	2	1	3	y_8	
9	3	3	2	1	y_9	

表8-1 A 因素数据资料表

因素	重复1	重复2	重复3	和	平均值
A_1	y_1	y_2	y_3	K_{A_1}	\bar{K}_{A_1}
A_2	y_4	y_5	y_6	K_{A_1}	\bar{K}_{A_1}
A_3	y_7	y_8	y_9	K_{A_1}	\bar{K}_{A_1}

单因素数据资料

表9 $L_n(m^k)$ 正交表及计算表格

表头设计	A	B	试验结果	
列号	1	2	...	k	y	
试验号					y	
1	1	y_1	
2	1	$L_n(m^k)$...	y_2
.	
.	
.	
n	m	y_n	

因素(互作) k

水平

m

水平重复

$$r = \frac{n}{m}$$

试验组合

n

表9 $L_n(m^k)$ 正交表及计算表格

表头设计	A	B	试验数据
列号	1	2	...	k	
试验号					y
1	1	y_1
2	1	y_2
...
n	m	y_n
K_{1j}	K_{11}	K_{12}	...	K_{1k}	$T = \sum_{i=1}^n y_i \quad C = \frac{T^2}{n}$ $SS_T = \sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y^2 - C$
K_{2j}	K_{21}	K_{22}	...	K_{2k}	
...	
K_{mj}	K_{m1}	K_{m2}	...	K_{mk}	
K_{1j}^2	K_{11}^2	K_{12}^2	...	K_{1k}^2	$SS_j = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m K_{ij}^2 - C$
K_{2j}^2	K_{21}^2	K_{22}^2	...	K_{2k}^2	
...	
K_{mj}^2	K_{m1}^2	K_{m2}^2	...	K_{mk}^2	
SS_j	SS_1	SS_2	...	SS_k	

表9 $L_n(m^k)$ 正交表及计算表格

表头设计	A	B	试验数据
列号	1	2	...	k	
试验号	$SS_j = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m K_{ij}^2 - C$				y
1	1	y_1

SS_j 是第j列中各水平对应的试验数据平均值与总平均值的离差平方和，反映了该列水平在变动时所引起的试验数据的波动情况。

	II	III	y_n
试验因素	K_{2j}	K_{21}	K_{22}	...	K_{2k}	
交互	SS_j 称为交互作用的离差平方和。					
空列	SS_j 表示由于实验误差和未被考察的因素（交互作用）所引起的波动，通常将其看作试验误差的离差平方和，用于显著性检验。					
	SS_j	SS_1	SS_2	...	SS_k	

表9 $L_n(m^k)$ 正交表及计算表格

表头设计	A	B	试验数据	
列号	1	2	...	k		
试验号					y	
1	1	y_1	
2	df_T	$= n - 1$	y_2	
...			
n			y_n
K_{1j}			K_{11}	K_{12}	...	K_{1k}
K_{2j}	df_j	$= m - 1$	K_{21}	...	K_{2k}	
...			
K_{mj}			K_{m1}	K_{m2}	...	K_{mk}
K_{1j}^2	K_{11}^2	K_{12}^2	...	K_{1k}^2		
K_{2j}^2	K_{21}^2	K_{22}^2	...	K_{2k}^2		
...		
K_{mj}^2	K_{m1}^2	K_{m2}^2	...	K_{mk}^2		
SS_j	SS_1	SS_2	...	SS_k		



3 正交试验的结果分析

3.2 正交试验结果的方差分析

3.2.1 不考虑交互作用等水平正交试验方差分析





实例分析3

自溶酵母提取物是一种多用途食品配料。

为探讨啤酒酵母的最适自溶条件，安排三因素三水平正交试验。

试验指标为自溶液中蛋白质含量（%）。

试验因素水平如下表。

表10 因素水平表

$L_9(3^4)$

水 平	试验因素		
	温度 (°C)	pH值	加酶量 (%)
	A	B	C
1	50	6.5	2.0
2	55	7.0	2.4
3	58	7.5	2.8



$L_9(3^4)$

试验号	1 A	2 B	3 C	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1



表11 自溶酵母提取物试验设计及结果

处理号	A	B	C	空列
1	1 (50)	1 (6.5)	1 (2.0)	1
2	1	2 (7.0)	2 (2.4)	2
3	1	3 (7.5)	3 (2.8)	3
4	2 (55)	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3 (58)	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

表11 自溶酵母提取物试验设计及结果分析

处理号	A	B	C	空列	试验结果 y_i
1	1 (50)	1 (6.5)	1 (2.0)	1	6.25
2	1	2 (7.0)	2 (2.4)	2	4.97
3	1	3 (7.5)	3 (2.8)	3	4.54
4	2 (55)	1	2	3	7.53
5	2	2	3	1	5.54
6	2	3	1	2	5.5
7	3 (58)	1	3	2	11.4
8	3	2	1	3	10.9
9	3	3	2	1	8.95

$T = 65.58$

计算

$$(1) K_{1j}, K_{2j}, K_{3j} \rightarrow K_{1j}^2, K_{2j}^2, K_{3j}^2$$

表11 自溶酵母提取物试验设计及结果分析

处理号	A	B	C	空列	试验结果 x_i
1	1 (50)	1 (6.5)	1 (2.0)	1	6.25
2	1	2 (7.0)	2 (2.4)	2	4.97
3	1	3 (7.5)	3 (2.8)	3	4.54
4	2	2	2	3	7.53
5	2	3	3	1	5.54
6	2	3	1	2	5.5
7	3	1	2	3	11.4
8	3	2	3	1	10.9
9	3	3	1	2	8.95
K_{1j}	15.76	25.18	22.65	20.74	
K_{2j}					87
K_{3j}					97
K_{1j}^2	248.38	344.84	976.56	430.15	
K_{2j}^2				478.30	
K_{3j}^2	976.56	360.62	461.39	527.62	

$$(2) SS_j = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m K_{ij}^2 - C$$

$$SS_A = \frac{1}{3} (K_{11}^2 + K_{21}^2 + K_{31}^2) - C$$

$$= \frac{1}{3} (248.38 + 344.84 + 976.56) - 477.86 = 45.4$$

$T = 65.58$

$$SS_B = 6.49, SS_C = 0.31$$

$$SS_e = 0.83 (\text{空列})$$

表11 自溶酵母提取物试验设计及结果分析

处理号	A	B	C	空列	试验结果 x_i
1	1 (50)	1 (6.5)	1 (2.0)	1	6.25
2	1	2 (7.0)	2 (2.4)	2	4.97
3	1	3 (7.5)	3 (2.8)	3	4.54
4	2 (55)	1	2	3	7.53
		2	3	1	5.54
		3	1	2	5.5
7	3 (58)	1	3	2	11.4
				3	10.9
				1	8.95
K_{1j}	15.76	25.18	22.65	20.74	
K_{2j}	18.57	21.41	21.45	21.87	
K_{3j}	31.25	18.99	21.48	22.97	
K_{1j}^2	248.38	634.03	513.02	430.15	
K_{2j}^2	344.84	458.39	460.10	478.30	
K_{3j}^2	976.56	360.62	461.39	527.62	

$$(3)df_j = m - 1$$

$$df_A = df_B = df_C = df_e = 3 - 1 = 2$$

表11 自溶酵母提取物试验设计及结果分析

处理号	A	B	C	空列	试验结果 x_i
1	1 (50)	1 (6.5)	1 (2.0)	1	6.25
2	1	2 (7.0)	2 (2.4)	2	4.97
3	1	3 (7.5)	3 (2.8)	3	4.54
4	2 (55)	1	2	3	7.53
5	2	2	3	1	5.54
6	2	3	1	2	5.5
(4) 计算方差，列出方差分析表。				2	11.4
				3	10.9
8	3	2	1	3	10.9
9	3	3	2	1	8.95
K_{1j}	15.76	25.18	22.65	20.74	
K_{2j}	18.57	21.41	21.45	21.87	
K_{3j}	31.25	18.99	21.48	22.97	
K_{1j}^2	248.38	634.03	513.02	430.15	
K_{2j}^2	344.84	458.39	460.10	478.30	
K_{3j}^2	976.56	360.62	461.39	527.62	

表12 自溶酵母提取物数据资料方差分析表

变异来源	平方和	自由度	均方	F值	F α	显著水平
A	45.40	2	22.70	55.37	F _{0.05(2,4)} = 6.94	**
B	6.49	2	3.24	7.90	F _{0.01(2,4)} = 18.0	*
C	0.31	2	0.16	0.39		
误差	0.83	2	0.41			
总和	53.03					

表12 自溶酵母提取物数据资料方差分析表

变异来源	平方和	自由度	均方	F值	F _α	显著水平
A	45.40	2	22.70	79.6	$F_{0.05(2,4)} = 6.94$	**
B	6.49	2	3.24	11.4	$F_{0.01(2,4)} = 18.0$	*
C	0.31	2	0.16			
误差e	0.83	2	0.41			
误差e [△]	1.14	4	0.285			
总和	53.03					

A 极显著

B 显著

C 不显著

$A > B > C$

表13 自溶酵母提取物数据资料结果分析表

处理号	温度 (°C) A	pH值 B	加酶量 (%) C	空列	试验结果 y_i
1	1 (50)	1 (6.5)	1 (2.0)	1	6.25
2	1	2 (7.0)	2 (2.4)	2	4.97
3	1	3 (7.5)	3 (2.8)	3	4.54
4	2 (55)	1	2	3	7.53
5	2	2	3	1	5.54
6	2	3	1	2	$A_3B_1C_3$
7	3 (58)	1	3	2	11.4
8	3	2	1	3	10.9
9	3	3	2	1	8.95
K_{1j}	15.76	25.18	22.65	20.74	
K_{2j}	18.57	21.41	21.45	21.87	$A_3B_1C_1$
K_{3j}	31.25	18.99	21.48	22.97	

□ 本试验指标值越高越好。

□ 对因素A、B分析，确定优水平为 A_3 、 B_1 。

□ 本因素C的水平改变对试验结果几乎无影响，从经济角度考虑，选 C_1 。



正交试验数据----方差分析



$$(1) K_{1j}, K_{2j}, K_{3j} \rightarrow K_{1j}^2, K_{2j}^2, K_{3j}^2$$

(2) 平方和与自由度分解

(3) 计算方差，列方差分析表

(4) 优化因素水平组合



3 正交试验的结果分析

3.2 正交试验结果的方差分析

3.2.2 考虑交互作用等水平正交试验方差分析





实例分析4

用石墨炉原子吸收分光光度法测定食品中铅含量，为了提高测定灵敏度，希望吸光度越大越好。

现研究影响吸光度的因素，以确定最佳测定条件。

A 因素: A_1 、 A_2

B 因素: B_1 、 B_2

C 因素: C_1 、 C_2

$L_8(2^7)$

因素间互作

表14 吸光度研究试验设计方案

试验号	A	B	C
1	1	1	1
2	1	1	2
3	1	2	1
4	1	2	2
5	2	1	1
6	2	1	2
7	2	2	1
8	2	2	2

实施？

表15 吸光度研究试验设计方案及结果

试验号	A	B	C	吸光度
1	1	1	1	2.42
2	1	1	2	2.24
3	1	2	1	2.66
4	1	2	2	2.58
5	2	1	1	2.36
6	2	1	2	2.4
7	2	2	1	2.79
8	2	2	2	2.76

表16 吸光度研究试验设计方案及结果分析

试验号	A	B	A×B	C	A×C	B×C	空列	吸光度
1	1	1	1	1	1	1	1	2.42
2	1	1	1	2	2	2	2	2.24
3	1	2	2	1	1	2	2	2.66
4	1	2	2	2	2	1	1	2.58
5	2	1	2	1	2	1	2	2.36
6	2	1	2	2	1	2	1	2.4
7	2	2	1	1	2	2	1	2.79
8	2	2	1	2	1	1	2	2.76
K_{1j}	9.9	9.42	10.21	10.23	10.24	10.12	10.19	
K_{2j}	10.31	10.79	10	9.98	9.97	10.09	10.02	
$K_{1j}-K_{2j}$	-0.41	-1.37	0.21	0.25	0.27	0.03	0.17	
SS_j	0.021	0.235	0.0055	0.0078	0.0091	0.0001	0.0036	

表17 吸光度研究试验结果方差分析

变异来源	平方和	自由度	均方
A	0.0210	1	0.021
B	0.2346	1	0.235
A×B	0.0055	1	0.006
C	0.0078	1	0.008
A×C	0.0091	1	0.009
B×C	0.0001	1	0.000
误差e	0.0036	1	0.004
总 和	0.2818		

表17 吸光度研究试验结果方差分析

变异来源	平方和	自由度	均方	F值	临界值 F_{α}	显著水平
A	0.0210	1	0.021	6.82	$F_{0.05(1,3)}=10.13$	
B	0.2346	1	0.235	76.19	$F_{0.01(1,3)}=34.12$	**
A×B	0.0055	1	0.006			
C	0.0078	1	0.008	2.53		
A×C	0.0091	1	0.009	2.96		
B×C	0.0001	1	0.000			
误差e	0.0036	1	0.004			
误差e [△]	0.00923	3	0.00308			
总 和	0.2818					

因素**B**极显著，

因素**A**、**C**及 **A×B**、**A×C**、**B×C**均不显著。

表18 吸光度研究试验结果分析

试验号	A	B	A×B	C	A×C	B×C	空列	吸光度
1	1	1	1	1	1	1	1	2.42
2	1	1	1	2	2	2	2	2.24
3	1	2	2	1	1	2	2	2.66
4	1	2	2	2	2	1	1	2.58
5	2	1	2	1	2	1	2	2.36
6	2	1	2	2	1	2	1	2.19
8	2	2	1	2	1	1	2	2.76
K_{1j}	9.9	9.42	10.21	10.23	10.24	10.12	10.19	
K_{2j}	10.31	10.79	10	9.98	9.97	10.09	10.02	
$K_{1j}-K_{2j}$	-0.41	-1.37	0.21	0.25	0.27	0.03	0.17	
SS_j	0.021	0.235	0.0055	0.0078	0.0091	0.0001	0.0036	

交互作用均不显著，确定因素的优水平时可以不考虑交互作用的影响。

对显著因素**B**，通过比较确定优水平为**B₂**；同理**A**取**A₂**，**C**取**C₁**。
 优组合为**A₂B₂C₁**。

各因素对试验结果影响的主次顺序为：**B、A、A×C、C、A×B、B×C**。



方差分析

- 方差分析可以分析出试验误差的大小，从而知道试验精度；
- 不仅可给出各因素及交互作用对试验指标影响的主次顺序，
- 而且可分析出哪些因素影响显著，哪些影响不显著。
- 对于显著因素，选取优水平并在试验中加以严格控制；
- 对不显著因素，可视具体情况确定优水平。

表18 吸光度研究试验结果分析

试验号	A	B	A×B	C	A×C	B×C	空列	吸光度
1	1	1	1	1	1	1	1	2.42
2	1	1	1	2	2	2	2	2.24
3	1	2	2	1	1	2	2	2.66
4	1	2	2	2	2	1	1	2.58
5	2	1	2	1	2	1	2	2.36
6	2	1	2	2	1	2	1	2.4
7	2	2	1	1	2	2	1	2.79
8	2	2	1	2	1	1	2	2.76
K_{1j}	9.9	9.42	10.21	10.23	10.24	10.12	10.19	
K_{2j}	10.31	10.79	10	9.98	9.97	10.09	10.02	
$K_{1j}-K_{2j}$	-0.41	-1.37	0.21	0.25	0.27	0.03	0.17	
SS_j	0.021	0.235	0.0055	0.0078	0.0091	0.0001	0.0036	

S_e^2

- “空列”并不空，实际上是被未考察的交互作用所占据。
- 这种误差既包含试验误差，也包含交互作用，称为模型误差。

- 若交互作用不存在，用模型误差估计试验误差是可行的；
- 若因素间存在交互作用，则模型误差会夸大试验误差，可能掩盖考察因素的显著性。这时，试验误差应通过重复试验值来估计。
- 正交设计最好设置2次以上的重复。
- 正交试验的重复，可采用完全随机或随机单位组设计。